Aufgabe 1 (*Tangentenflächen*) (4 Punkte)
Sei $\gamma \in C^2(I, \mathbb{R}^3)$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve. Dann heißt $F : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $F(s,t) = \gamma(s) + t\gamma'(s)$, Tangentenfläche. Überlegen Sie, unter welchen Voraussetzungen F eine Immersion ist und berechnen Sie die erste Fundamentalform. Spezialisieren Sie auf den Fall $\gamma(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(s, \cos s, \sin s)$ und fertigen Sie eine Skizze der Fläche an.

Aufgabe 2 (*Parametrisierung von Kegeln*) (4 Punkte)
Sei $\gamma : (0, L) \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte C^1-Kurve. Berechnen Sie die erste Fundamentalform der Kegelfläche

$$F : (0, \infty) \times (0, L) \to \mathbb{R}^3,\ F(r, s) = r\gamma(s),$$

und fertigen Sie eine Skizze an.

Aufgabe 3 (*Helikoid*) (4 Punkte)
Das Helikoid entsteht, wenn die x-Achse im $\mathbb{R}^3$ um den Nullpunkt rotiert und gleichzeitig vertikal translatiert wird. Geben Sie eine Parametrisierung des Helikoids an, berechnen Sie die erste Fundamentalform des Helikoids und fertigen Sie eine Skizze an.

Aufgabe 4 (*Tschebyscheff-Netze*) (4 Punkte)
Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle. Zeigen Sie, dass für eine reguläre C^2-Fläche $F : I \times J \to \mathbb{R}^3$ folgende Aussagen äquivalent sind:

(1) Für alle $[a, b] \subset I$ ist die Funktion $y \mapsto L(F(\cdot, y)|_{[a,b]})$ konstant.

(2) Für die erste Komponente der ersten Fundamentalform gilt $\partial_2 g_{11} = 0$.

Bemerkung. Ein Tschebyscheff-Netz auf einer Fläche ist eine Parametrisierung mit $\partial_1 g_{22} = \partial_2 g_{11} = 0$.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Mittwoch, den 08.06.11.